

几个大家关心的问题：

- 小测： 3月24日
- 答疑： 周五课前；
上课教室
- 课后作业： 2.15-2.20

第2章 电磁波的传播和传输

- 电磁波传播
- 波导中的传输
- 微波传输线的分析模型
- 微波网络的分析模型

微波传输线的分析模型

- 传输线分析模型及其解
- 传输线特征量及其变换式
- 均匀无耗传输线的工作状态
- 圆图
- 阻抗匹配

微波传输线的分析模型

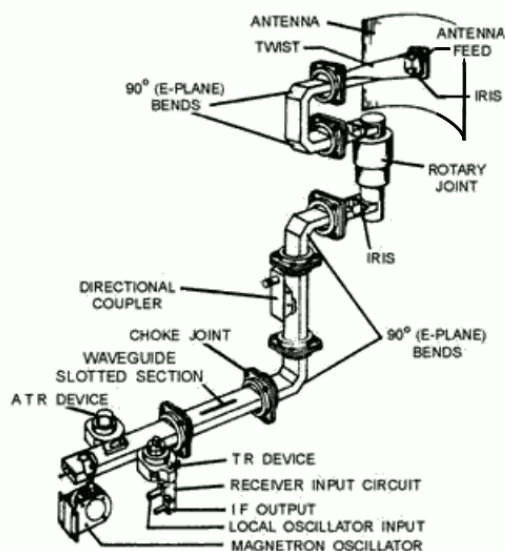
一. 什么是微波传输线

定义：能用于传输微波能量或者信息的各种形式传输系统的总称；

本质特征：在构成传输线的**导体或者介质边界**约束下，形成由这些导体或者介质边界所**引导的波**，将信号源的电磁能量以**被引导波**形式传导到负载。

基本要求：损耗小：导体损耗、介质损耗、辐射损耗

效率高：支持大功率、宽频带



微波传输线的分析模型

二. 传输线与低频线的差异（集总电路）

1. 电尺寸（电长度）的差别

电尺寸：物理长度与其工作波长之比： l / λ

低频线： $\lambda \gg l$ 所以称为短线（相对波长）

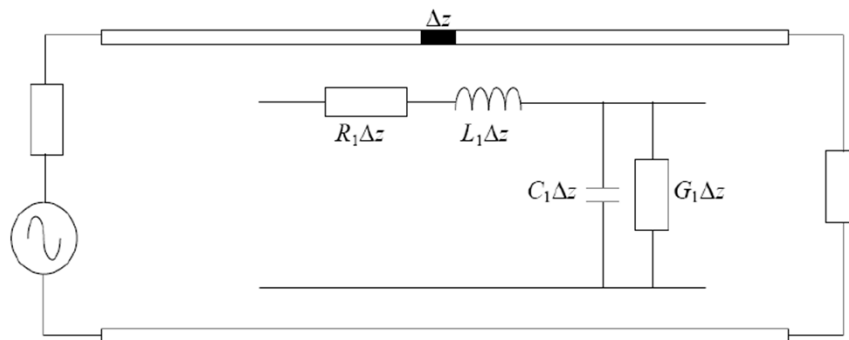
高频线： $\lambda \leq l$ $l > 0.1 \sim 0.05\lambda$ 所以称为长线

必需考察沿线各点处电场（或者电压）与磁场（或者电流）随着时间和空间的变化、以及电磁震荡沿着整个传输线的传播过程，即长线理论。

微波传输线的分析模型

2. 电气参数分布的差别

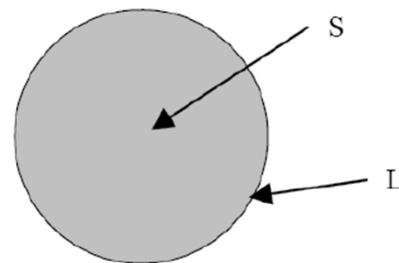
在任意一段长度为 Δz 且充分小的传输线中，电气参数都包括：分布电阻 R_1 （电流流过导线使得导线发热，导体损耗），分布电导 G_1 （导线间绝缘不完善引起的漏电流，介质损耗）、分布电容 C_1 （导线之间有点电压表面线间存在电场）、分布电感 L_1 （导体通过电流周围产生磁场）



3. 损耗的差别

低频线： $R_l \sim 1/S$

高频线： $R_l \sim 1/L$ L 为导体周界



微波传输线的分析模型

4. 传输方式的差别

低频线必需为电路提供一个电流回路

传输线的作用是约束和引导电磁波沿着导引方向前进、本质上无需构成电流回路、传输过程是波动过程。

5. 工程应用差别

除了传输能量和信息以外，传输线模型可以在其他学科（满足波动方程）也有着应用：

- a. 热力学
- b. 量子
- c. 多物理耦合
- d. ...

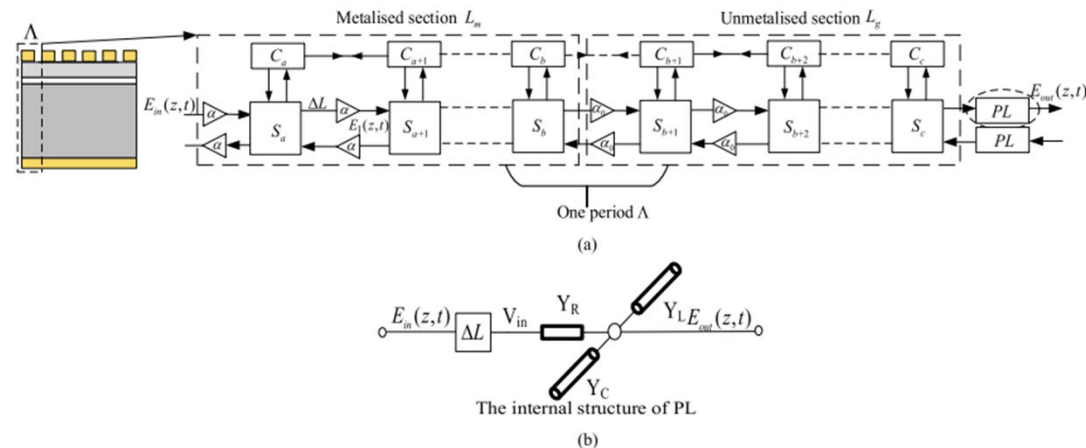


Fig. 13. Q-TLM model for the THz PL-QCL. (a) Model structure for PL THz QCL with one period length. (b) Internal structure of PL.

微波传输线的分析模型

三. 传输线分类

按照导行电磁波类型和场的分布可以分为：

1. TEM波传输线（包括准TEM波传输线）

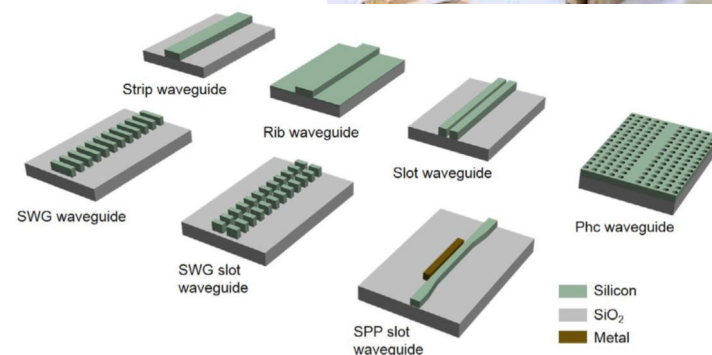
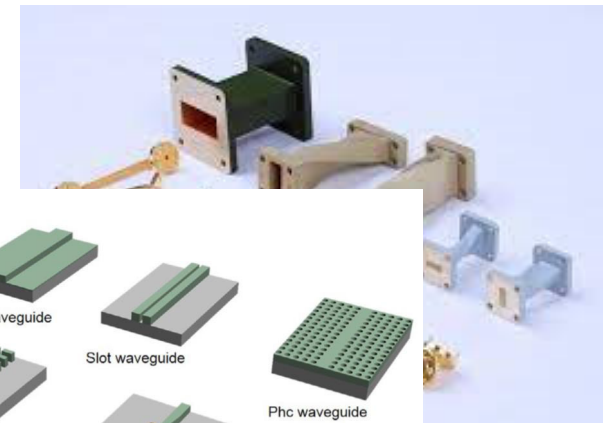
- 同轴线、带状线
- 微带线、共面波导

2. TE/TM 波传输线

- 矩形波导、圆波导
- 椭圆波导、脊波导、扇形波导

3. 混合波传输线

- 光纤、薄膜波导、平板介质波导
- 矩形介质波导



微波传输线的分析模型

四. 传输线分析方法

“场”的方法:

麦克斯韦方程组	波动方程和边界条件	电场和磁场分布的求解
$\begin{cases} \nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon\vec{E} \\ \nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \\ \nabla \cdot \vec{D} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \\ \nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0 \end{cases}$ 电壁 — $\vec{n} \times \vec{E} _{\Omega} = 0$, $\vec{n} \cdot \vec{H} _{\Omega} = 0$ 磁壁 — $\vec{n} \times \vec{H} _{\Omega} = 0$, $\vec{n} \cdot \vec{E} _{\Omega} = 0$	$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r})e^{j\omega t} \\ \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}(\vec{r})e^{j\omega t} \end{cases}$

“路”的方法:

克西霍夫定理	波动方程和边界条件	电压和电流分布的求解
$\begin{cases} \sum I = 0 \\ \sum U = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{d^2 U}{dz^2} - \gamma^2 U = 0 \\ \frac{d^2 I}{dz^2} - \gamma^2 I = 0 \end{cases}$ 源、源阻抗和负载等条件。	$\begin{cases} U(z)e^{-\gamma z}e^{j\omega t} \\ I(z)e^{-\gamma z}e^{j\omega t} \end{cases}$

微波传输线的分析模型及其解

研究传输线问题的起点：“传输线”三个字：

1. “线”：不仅仅表明所有的传输线无论粗细或者宽窄，总体上呈现的是线状结构、而且更希望指明的是线的走向代表了电磁能量的传递方向。本课程始终将电磁能量的传递方向定义为： z 方向（直线方向）。

2. “传输”：不仅仅是对线的用途限定，而且也提示我们要了解传输线首先要从传输特性入手，即在 z 方向的电磁波传输特性。

据此，本章的目的是建立传输线的传输模并展现基本的传输特性，模型的基本特点是1.一维结构、仅和传输 z 方向有关；2.电路模型，考虑沿线电压（波） u 和电流 i 。

由于微波波长与传输线的物理长度可比拟甚至更小，所以传输线沿线电压 u 和电流 i 都应该是位置 z 和时间 t 的函数。

微波传输线的分析模型及其解

- 传输线方程——场方法
- 传输线模型——路方法
- 传输线方程的解

微波传输线的分析模型及其解

■ 传输线方程

对于波导中任意一个确定的传输模式，其切向场分布是固定的，随传输（ z ）改变，改变的仅为幅值。例如，矩形波导中：

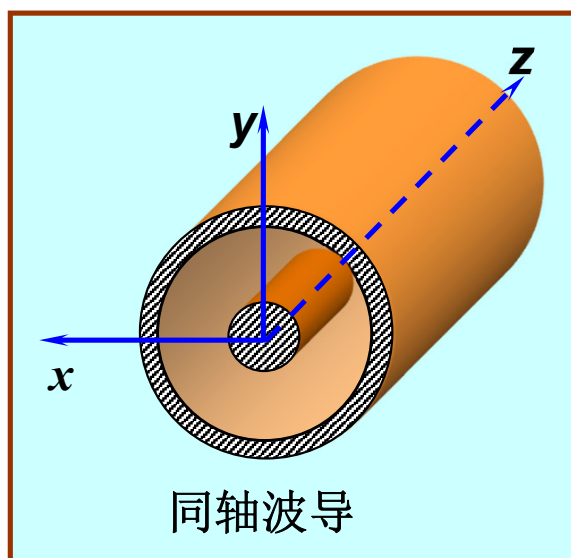
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{t})e^{-\gamma z} \Rightarrow \mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{E}(x, y)e^{-\gamma z}$$

故可将幅值单独分析。一般将电场幅值等效看成电压，磁场幅值看成电流，关于等效电压和电流的方程称为传输线方程。

例 已知同轴传输线的内导体半径为 a ，外导体的内径为 b 。

求：①同轴线传输TEM波的电场和磁场的表达式。

②用单位长度的电感和电容表示相速度。

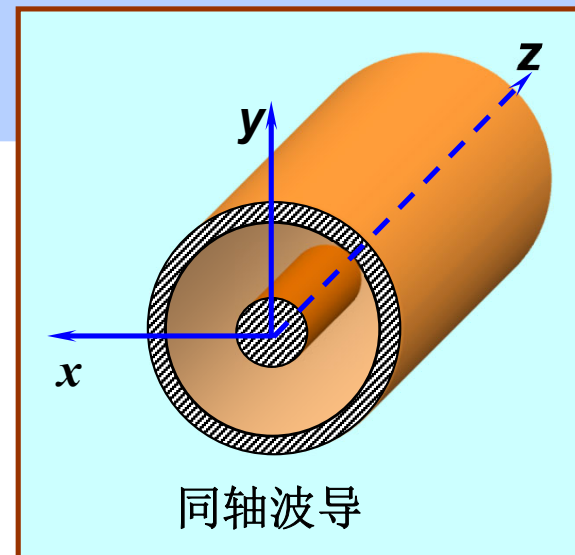


同轴波导是一种内、外导体构成的双导体导波系统，也称为同轴线。如图所示，内、外导体为理想导体，内导体半径为 a ，外导体的内半径为 b ，内、外导体之间填充电参数为 ϵ 和 μ 的理想介质。由于同轴线是双导体波导，因此它既可以传播TEM波，也可以传播TE波和TM波。

问题：为啥同轴波导（同轴线）可以传播TEM波,但是矩形空波导却不支持？

1. TEM波的场分布

设电磁波沿 $+z$ 方向传播，相应的场为时谐场，其复数形式为



$$\vec{E}(\rho, \phi, z) = \vec{E}(\rho, \phi)e^{-\gamma z}, \vec{H}(\rho, \phi, z) = \vec{H}(\rho, \phi)e^{-\gamma z}$$

对于TEM波, $E_z = 0, H_z = 0$, 而磁力线是闭合曲线, 电场和磁场都在横截面内, 即 $\vec{H} = \vec{e}_\phi H_\phi, \vec{E} = \vec{e}_\rho E_\rho$

$$\vec{E}(\rho, \phi, z) = \hat{\rho}E(\rho, \phi)e^{-\gamma z}, \vec{H}(\rho, \phi, z) = \hat{\phi}H(\rho, \phi)e^{-\gamma z}$$

$$\vec{E}(\rho, \phi, z) = \hat{\rho} E(\rho, \phi) e^{-\gamma z}, \vec{H}(\rho, \phi, z) = \hat{\phi} H(\rho, \phi) e^{-\gamma z}$$

$$E_\rho \triangleq E(\rho, \phi) \quad H_\phi \triangleq H(\rho, \phi)$$

在圆柱坐标系中旋度计算公式：

$$\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho \hat{\phi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_\rho & \rho F_\phi & F_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho \hat{\phi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E(\rho, \phi) e^{-\gamma z} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{\phi} \frac{\partial}{\partial z} (E(\rho, \phi) e^{-\gamma z}) + \frac{1}{\rho} \hat{z} \left(\frac{\partial}{\partial \phi} E(\rho, \phi) e^{-\gamma z} \right) = -\gamma \hat{\phi} E(\rho, \phi) e^{-\gamma z}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial \phi} E(\rho, \phi) = 0 \\ \gamma E_\rho = j\omega\mu H_\phi \end{array} \right.$$

由法拉第感应定律： $\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu \mathbf{H}$

$$\gamma E_\rho = j\omega\mu H_\phi$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \Rightarrow \gamma E_\rho = j\omega\mu H_\phi$$

同理:

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\varepsilon\mathbf{E} \Rightarrow \begin{cases} \gamma H_\phi = j\omega\varepsilon E_\rho \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho H_\phi) = 0 \end{cases}$$

$$E_\rho = \frac{\gamma}{j\omega\varepsilon} H_\phi = \frac{j\omega\mu}{\gamma} H_\phi$$

$$\gamma^2 = -\omega^2 \varepsilon \mu \Rightarrow \gamma = jk$$

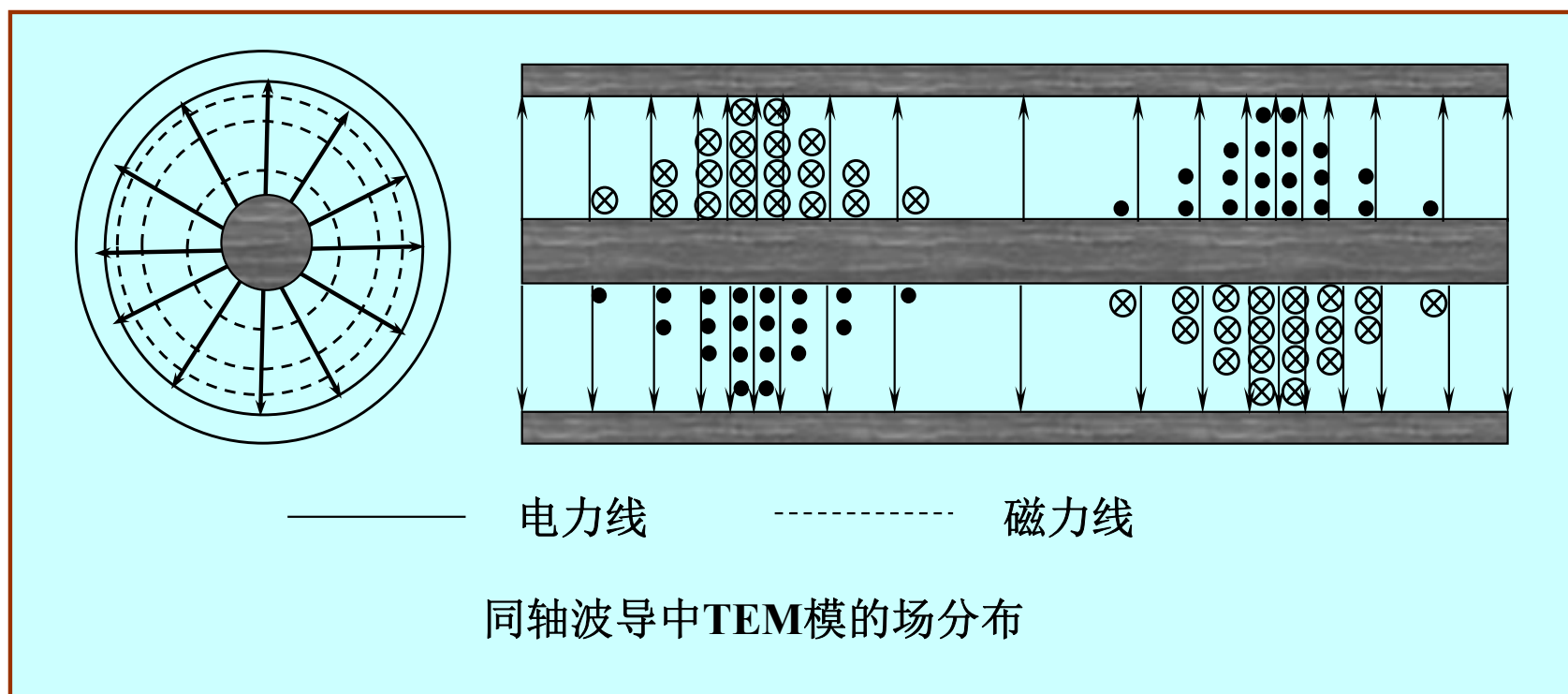
$$H_\phi = \frac{H_m}{\rho} e^{-\gamma z}$$

随着距离 ρ 衰减的量

$$E_\rho = \eta H_\phi = \eta \frac{H_m}{\rho} e^{-\gamma z}$$

所以 H_m 是一个常数

同轴波导中TEM模的场分布如图所示



2. TEM波的传播参数

截止波数 $k_c = \sqrt{\gamma^2 + k^2} = 0, \quad \gamma = jk$

截止波长 $\lambda_c = \infty$ —— TEM模是同轴波导中的主模

传播常数: $\gamma = \gamma_{\text{TEM}} = jk = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon} = j\beta$

相位常数: $\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$

相速度: $v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ —— 无色散波

波阻抗: $Z_{\text{TEM}} = \frac{E_\rho}{H_\phi} = \frac{\gamma}{j\omega\varepsilon} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \eta$

小结: ①没有截止频率的限制, 原则上可以传输任意频率的电磁波;
②TEM波为非色散波, 不会产生宽带信号的变形。

例：无限长圆柱同轴线，内外导体间的电压为U。求：此同轴线空腔内的电场。

$$\mathbf{D} = D\hat{\rho}$$

解：①以同轴线轴线为z轴建立柱坐标系

设内导体上单位长度总电荷为Q，利用高斯定理可知：

$$D2\pi\rho l = Ql \Rightarrow D = \frac{Q}{2\pi\rho}$$

则电场可表示为：

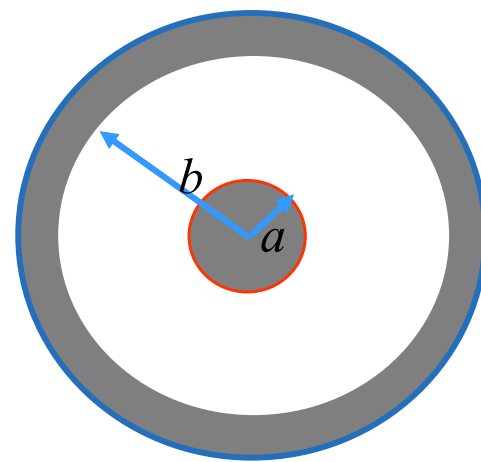
$$\vec{E} = \hat{\rho} \frac{Q}{2\pi\epsilon_0\rho} \quad (a < r < b)$$

则内外导体之间的电压可表示为：

$$U = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}$$

$$\therefore Q = U \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{b}{a}} \quad \vec{E} = \hat{\rho} \frac{U}{\rho \ln \frac{b}{a}} \quad (a < \rho < b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad \text{电荷密度}\rho$$



同轴线横截面上的解为 $\vec{E} = \hat{\rho} \frac{U}{\rho \ln(b/a)}$

上式乘以 e^{-jkz} ，并记 $U = U_0 e^{j\phi}$ 为复常数，得到TEM波的电场复矢量

$$\vec{E}(\vec{r}) = \hat{\rho} \frac{U_0}{\rho \ln(b/a)} e^{j\phi} e^{-jkz}$$

电场瞬时矢量为 $\vec{E}(\vec{r}, t) = \hat{\rho} \frac{U_0}{\rho \ln(b/a)} \cos(\omega t - kz + \phi)$

对应的磁场复矢量为 $\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{\eta} \hat{k} \times \vec{E}(\vec{r}) = \hat{\phi} \frac{U_0}{\eta \rho \ln(b/a)} e^{j\phi} e^{-jkz}$

磁场瞬时矢量为 $\vec{H}(\vec{r}, t) = \hat{\phi} \frac{U_0}{\eta \rho \ln(b/a)} \cos(\omega t - kz + \phi)$

②根据同轴线单位长度上的电感和电容

$$\begin{aligned}
 \vec{E} &= \hat{\rho} \frac{U}{\rho \ln(b/a)} & I &= \vec{H}(\vec{r}) 2\pi\rho = \frac{2\pi U}{\eta \ln(b/a)} \\
 \vec{H}(\vec{r}) &= \hat{\phi} \frac{U}{\eta \rho \ln(b/a)} & \Phi &= \int_a^b \mu \vec{H}(\vec{r}) \cdot d\rho \hat{\phi} = \mu \frac{U}{\eta} \\
 \vec{D} &= \varepsilon \hat{\rho} \frac{U}{a \ln(b/a)} & Q &= \varepsilon \frac{U}{a \ln(b/a)} 2\pi a = \varepsilon \frac{2\pi U}{\ln(b/a)}
 \end{aligned}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{aligned} L_0 &= \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \\ C_0 &= \frac{Q}{U} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln(b/a)} \end{aligned}$$

TEM波的相速度可以表示为
$$v_p = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$$

故可将幅值单独分析。一般将电场幅值等效看成电压，磁场幅值看成电流，关于等效电压和电流的方程称为传输线方程。

波导正规模的特性

如果第m个模和第n个模都沿正z方向传输

$$\mathbf{E}_{tm} = e^{-\gamma_m z} \mathbf{e}_m(x, y), \quad \mathbf{H}_{tm} = \frac{1}{Z_m} e^{-\gamma_m z} \mathbf{h}_m(x, y) \quad (2.2.47a)$$

$$\mathbf{E}_{tn} = e^{-\gamma_n z} \mathbf{e}_n(x, y), \quad \mathbf{H}_{tn} = \frac{1}{Z_n} e^{-\gamma_n z} \mathbf{h}_n(x, y) \quad (2.2.47b)$$

$$\mathbf{h}_m(x, y) = \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{e}_m(x, y) \quad (2.2.48a) \quad \int_S \mathbf{e}_m(x, y) \cdot \mathbf{e}_m(x, y) dS = 1 \quad (2.2.48a)$$

$$(\gamma_m + \gamma_n) \int_s \left(\frac{1}{Z_n} \mathbf{e}_m \times \mathbf{h}_n - \frac{1}{Z_m} \mathbf{e}_n \times \mathbf{h}_m \right) \cdot (\hat{\mathbf{z}}) ds = 0 \quad (2.2.49)$$

显然 $\gamma_m + \gamma_n \neq 0$ ，故

$$\int_s \left(\frac{1}{Z_n} \mathbf{e}_m \times \mathbf{h}_n - \frac{1}{Z_m} \mathbf{e}_n \times \mathbf{h}_m \right) \cdot (\hat{\mathbf{z}}) ds = 0 \quad (2.2.50)$$

传输线方程——场方法

下面我们就推导等效电压和电流所满足的传输线方程
横向的电磁场可表示为

$$\mathbf{E}_t(x, y, z) = U(z) \mathbf{e}_t(x, y) \quad (2.3.1)$$

$$\mathbf{H}_t(x, y, z) = I(z) \mathbf{h}_t(x, y) \quad (2.3.2)$$

$$\int_S (\mathbf{e}_t \times \mathbf{h}_t) \cdot \hat{\mathbf{z}} dS = 1 \quad (2.3.3)$$

根据麦克斯韦方程 $\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H}$ (2.3.4)

将算子 ∇ 分解成 $\nabla_t + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{z}}$ ，电场 $\mathbf{E}$ 分解为 $\mathbf{E}_t + E_z \hat{\mathbf{z}}$ ，磁场 $\mathbf{H}$ 分解为 $\mathbf{H}_t + H_z \hat{\mathbf{z}}$ ，(2.3.4) 式的左边可展成

$$\left(\nabla_t + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \right) \times (\mathbf{E}_t + E_z \hat{\mathbf{z}}) = \nabla_t \times \mathbf{E}_t + \underbrace{(\nabla_t E_z) \times \hat{\mathbf{z}} + \hat{\mathbf{z}} \times \frac{\partial \mathbf{E}_t}{\partial z}}_{\text{---}} \quad (2.3.5a)$$

传输线方程——场方法

根据 $\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H}$, 有:

$$(\nabla_t E_z) \times \hat{\mathbf{z}} + \hat{\mathbf{z}} \times \frac{\partial \mathbf{E}_t}{\partial z} = -j\omega\mu\mathbf{H}_t \quad (2.3.5b)$$

$$\nabla_t \times \mathbf{E}_t = -j\omega\mu H_z \hat{\mathbf{z}} \quad (2.3.5c)$$

同样, 根据 $\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\varepsilon\mathbf{E}$ (2.3.6), 利用 (对偶性) 可得:

$$\therefore (\nabla_t H_z) \times \hat{\mathbf{z}} + \hat{\mathbf{z}} \times \frac{\partial \mathbf{H}_t}{\partial z} = j\omega\varepsilon\mathbf{E}_t \quad (2.3.7a)$$

$$\nabla_t \times \mathbf{H}_t = j\omega\varepsilon E_z \hat{\mathbf{z}} \quad (2.3.7b)$$

(2.3.5c) 式两边点乘 $\hat{\mathbf{z}}$ 得: $H_z = -\frac{1}{j\omega\mu} \hat{\mathbf{z}} \cdot \nabla_t \times \mathbf{E}_t$ 将该式代入
(2.3.7a)

$$-\frac{1}{j\omega\mu} \nabla_t (\hat{\mathbf{z}} \cdot \nabla_t \times \mathbf{E}_t) \times \hat{\mathbf{z}} + \hat{\mathbf{z}} \times \frac{\partial \mathbf{H}_t}{\partial z} = j\omega\varepsilon\mathbf{E}_t \quad (2.3.9)$$

传输线方程——场方法

利 $\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a}) + (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a}$ (2.3.10)

化简(2.3.9) 中 $\nabla_t(\hat{\mathbf{z}} \cdot \nabla_t \times \mathbf{E}_t) = \hat{\mathbf{z}} \times (\nabla_t \times \nabla_t \times \mathbf{E}_t)$ (2.3.11)

(2.3.9) 变为: $-\frac{1}{j\omega\mu} \nabla_t \times \nabla_t \times \mathbf{E}_t + \hat{\mathbf{z}} \times \frac{\partial \mathbf{H}_t}{\partial z} = j\omega\epsilon \mathbf{E}_t$ (2.3.12)

将式(2.3.1), (2.3.2)代入式(2.3.12)得

$$-j\omega\epsilon \left(\mathbf{e}_t - \frac{1}{k^2} \nabla_t \times \nabla_t \times \mathbf{e}_t \right) U = -(\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{h}_t) \frac{\partial I}{\partial z}$$

两边点乘 $-\mathbf{e}_t$, 并在横截面上做积分得:

$$\int_S \mathbf{e}_t \cdot (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{h}_t) dS \frac{\partial I}{\partial z} = j\omega\epsilon U \int_S \left(\mathbf{e}_t - \frac{1}{k^2} \nabla_t \times \nabla_t \times \mathbf{e}_t \right) \cdot \mathbf{e}_t dS \quad (2.3.13)$$

传输线方程——场方法

利用(2.3.3) ($\int_S \mathbf{e}_m \times \mathbf{h}_n \cdot \hat{\mathbf{z}} dS = \delta_{mn}$ 模式正交性) 得

$$\frac{\partial I}{\partial z} = -j\omega C_0 U = -Y_0 U \quad (2.3.15)$$

其中

$$Y_0 = j\omega C_0; \quad C_0 = \varepsilon \int_S \left(\mathbf{e}_t - \frac{1}{k^2} \nabla_t \times \nabla_t \times \mathbf{e}_t \right) \cdot \mathbf{e}_t dS \quad (2.3.16)$$

同理，依据对偶性可得：

$$-\frac{1}{j\omega\mu} \nabla_t \times \nabla_t \times \mathbf{E}_t + \hat{\mathbf{z}} \times \frac{\partial \mathbf{H}_t}{\partial z} = j\omega\varepsilon \mathbf{E}_t$$



$$-\frac{1}{j\omega\varepsilon} \nabla_t \times \nabla_t \times \mathbf{H}_t - \hat{\mathbf{z}} \times \frac{\partial \mathbf{E}_t}{\partial z} = j\omega\mu \mathbf{H}_t$$

传输线方程——场方法

$$-\frac{1}{j\omega\epsilon}\nabla_t \times \nabla_t \times \mathbf{H}_t - \hat{\mathbf{z}} \times \frac{\partial \mathbf{E}_t}{\partial z} = j\omega\mu\mathbf{H}_t$$

将式(2.3.1), (2.3.2)代入得

$$-j\omega\mu I \left(\mathbf{h}_t - \frac{1}{k^2} \nabla_t \times \nabla_t \times \mathbf{h}_t \right) = \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{e}_t \frac{\partial U}{\partial z}$$

两边点乘 $\mathbf{h}_t$ 并在横截面上做积分得:

$$-j\omega\mu I \int_S \left(\mathbf{h}_t - \frac{1}{k^2} \nabla_t \times \nabla_t \times \mathbf{h}_t \right) \cdot \mathbf{h}_t dS = \frac{\partial U}{\partial z} \int_S \mathbf{h}_t \cdot \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{e}_t dS$$

利用模式正交性得: $\frac{\partial U}{\partial z} = -j\omega L_0 I = -Z_0 I$

$$Z_0 = j\omega L_0; \quad L_0 = \mu \int_S \left(\mathbf{h}_t - \frac{1}{k^2} \nabla_t \times \nabla_t \times \mathbf{h}_t \right) \cdot \mathbf{h}_t dS$$

传输线方程——场方法

小结：

①利用麦克斯韦方程组及模式正交性推导得到了等效电压和电流所满足的传输线方程（电报方程）：

$$\frac{\partial I}{\partial z} = -Y_0 U$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -Z_0 I$$

②如果只是研究波导某一种模式得传输，那么三维波矢量方程求解可转化为一维传输线方程的求解。

微波传输线的分析模型及其解

- 传输线方程——场方法
- 传输线模型——路方法
- 传输线方程的解

传输线模型——路方法

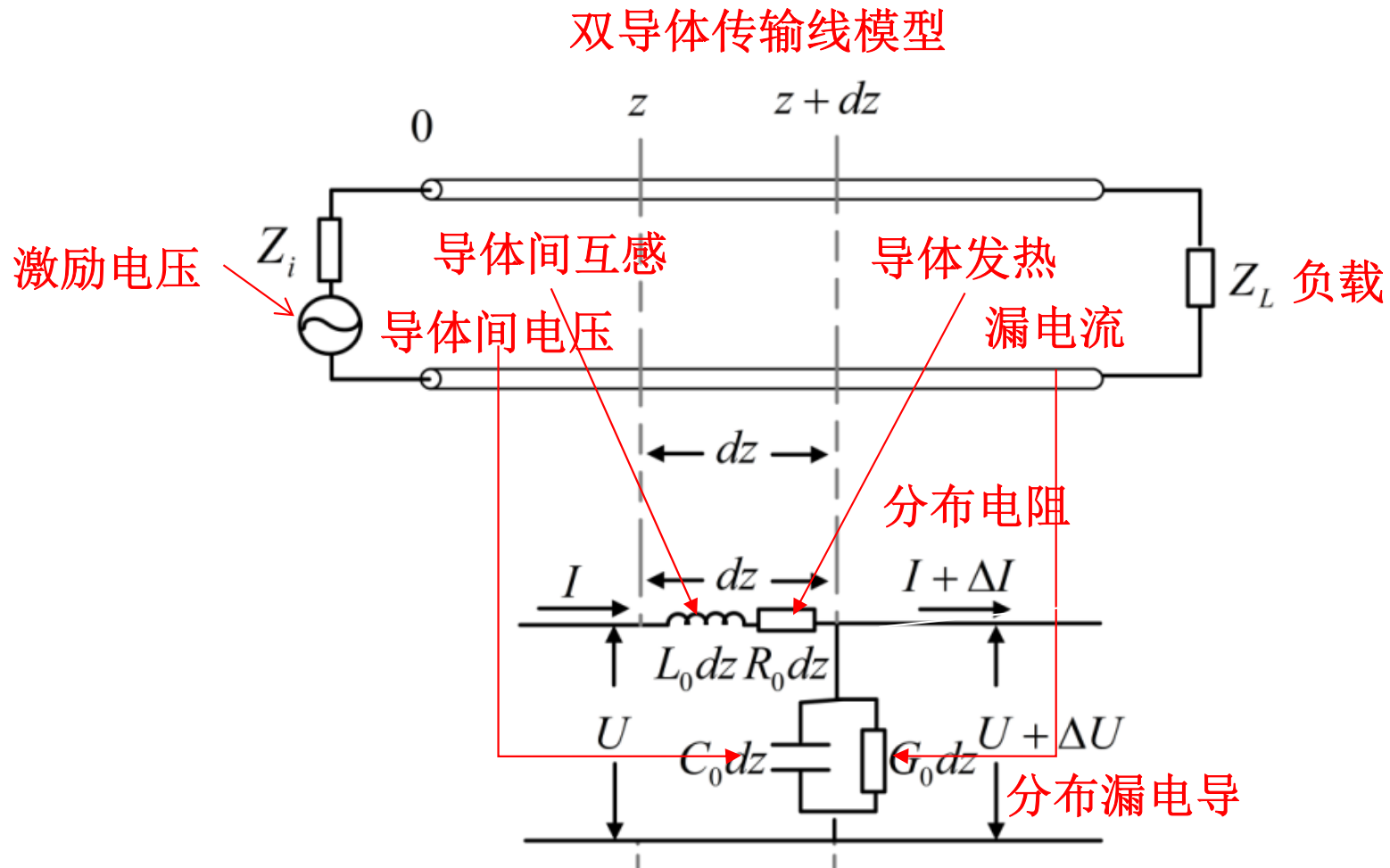
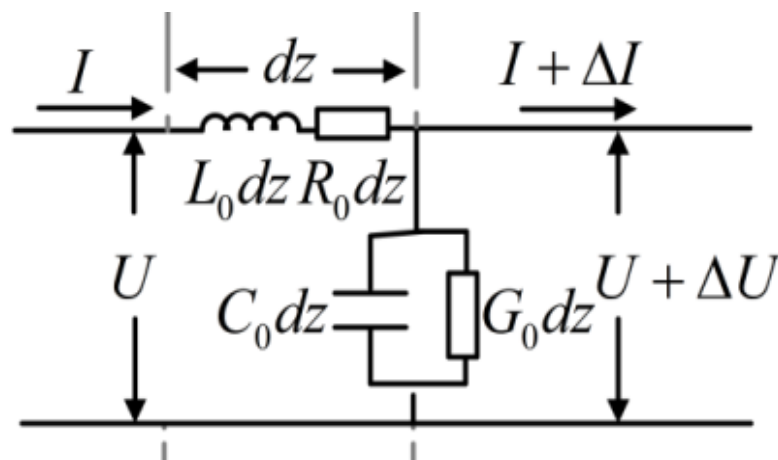


图2-14传输线模型及其单位长度 dz 上的等效电路模型

集总Vs 分布



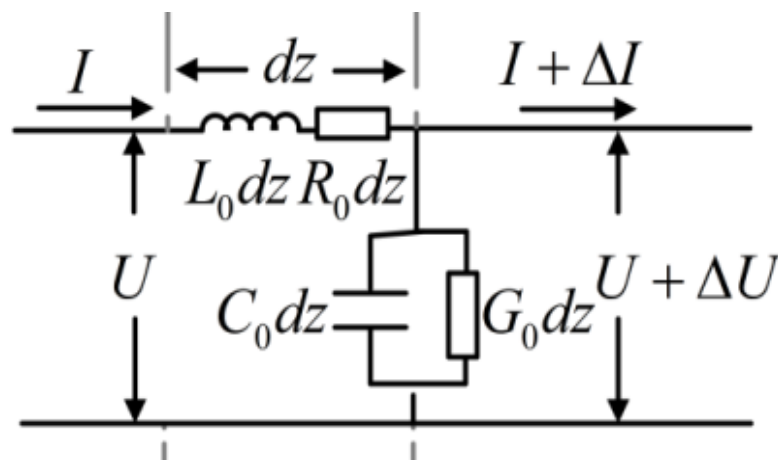
其单位长度 dz 上的分布参数： L_0 ， R_0 ， C_0 ， G_0 均对电路中的电流起阻碍作用。

电阻：阻抗的是实部 (Resistance)。 电磁能量的损耗：热损耗、辐射损耗

电导：为电阻的倒数。

电感：为阻抗的虚部（电抗，Reactance），称为感抗，频率和电感越大，电抗越大。 ωL 磁能的存储

电容：为阻抗的虚部，称为容抗，频率和电容越大，电抗越小。 $\frac{1}{\omega C_0}$ 电能的存储



串联阻抗: $\Delta U = -I(j\omega L + R) \Rightarrow Z_0 = \frac{\Delta U}{I} = -(j\omega L_0 + R_0)$

并联导纳: $\Delta I = -\frac{U}{\frac{1}{G_0}} - \frac{U}{\frac{1}{j\omega C_0}} \Rightarrow Y_0 = \frac{\Delta I}{U} = -(j\omega C_0 + G_0)$

传输线模型——路方法

考虑时谐场(角频率 ω)的情况, 则每单位长度的串联阻抗和并联导纳分别为

$$Z_0 = R_0 + j\omega L_0 \quad (2.3.19)$$

$$Y_0 = G_0 + j\omega C_0$$

$$\text{电压的变化} = -\Delta U = U - (U + \Delta U) = -\frac{\partial U}{\partial z} dz = \boxed{IZ_0} dz \quad (2.3.20)$$

$$\text{电流的变化} = -\Delta I = I - (I + \Delta I) = -\frac{\partial I}{\partial z} dz = \boxed{UY_0} dz$$

上式 dz 移动到左侧并取极限, 得到与(2.3.15)和(2.3.17)相同的传输线方程

$$\frac{\partial I}{\partial z} = -Y_0 U \quad (2.3.21)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -Z_0 I \quad (2.3.22)$$

传输线方程——路方法

小结：

- ①将传输线由等效电路模型描述；
- ②电压的变化由串联阻抗引起、电流变化由并联导纳引起，从而导出传输线方程：

$$\frac{\partial I}{\partial z} = -Y_0 U$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -Z_0 I$$

- ③矩形波导和双导体传输线模型相同，推而广之，不同种类传输线都可以用上述模型来研究。

传输线模型——路方法

例题2.7：利用 (2.3.1) – (2.3.3) 表示波导中平均纵向坡印亭功率

解：

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot \hat{\mathbf{z}} dS = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\int_S (\mathbf{E}_t \times \mathbf{H}_t^*) \cdot \hat{\mathbf{z}} dS \right] \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\int_S (\mathbf{e}_t U \times \mathbf{h}_t I^*) \cdot \hat{\mathbf{z}} dS \right] = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[UI^* \int_S (\mathbf{e}_t \times \mathbf{h}_t) \cdot \hat{\mathbf{z}} dS \right] \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} [UI^*] \end{aligned}$$


$$\boxed{\int_S \mathbf{e}_m \times \mathbf{h}_n \cdot \hat{\mathbf{z}} dS = \delta_{mn} \Rightarrow \int_S \mathbf{e}_m \times \mathbf{h}_m \cdot \hat{\mathbf{z}} dS = 1}$$

传输线模型——路/场方法

几个重要假设与前提:

- 场方法以电、磁场以传输线分布为未知量；路方法以沿线电压、电流分布为未知量；两者通过以下关系统一

$$\mathbf{E}_t(x, y, z) = U(z) \mathbf{e}_t(x, y)$$

$$\mathbf{H}_t(x, y, z) = I(z) \mathbf{h}_t(x, y)$$

- 路方法中的电容、电感、电阻、导纳的概念,也可以在场方法中寻找对应关系:

$$Z_0 = j\omega L_0; \quad L_0 = \mu \int_S \left(\mathbf{h}_t - \frac{1}{k^2} \nabla_t \times \nabla_t \times \mathbf{h}_t \right) \cdot \mathbf{h}_t dS$$

$$Y_0 = j\omega C_0; \quad C_0 = \varepsilon \int_S \left(\mathbf{e}_t - \frac{1}{k^2} \nabla_t \times \nabla_t \times \mathbf{e}_t \right) \cdot \mathbf{e}_t dS$$

传输线模型——路/场方法

几个重要假设与前提：

- 场方法以电、磁场以传输线分布为未知量；路方法以沿线电压、电流分布为未知量；两者通过以下关系统一

$$\mathbf{E}_t(x, y, z) = U(z) \mathbf{e}_t(x, y)$$

$$\mathbf{H}_t(x, y, z) = I(z) \mathbf{h}_t(x, y)$$

- 对于从场的分析过程可知：路模型中建立的元件是针对单个模式来定义的，因此同一条传输线可以多个等效电路；
- 在研究中，需要先确定传输线所能传输的模式后，再针对不同的模式来建立等效电路模型；

微波传输线的分析模型及其解

- 传输线方程——场方法
- 传输线模型——路方法
- 传输线方程的解

传输线方程的解

将式(2.3.22) 对 z 求偏导, 并将式(2.3.21)代入可以得到

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - Z_0 Y_0 U = 0 \quad (2.3.23a)$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial z^2} - Z_0 Y_0 I = 0 \quad (2.3.23b)$$

定义 $\gamma = \sqrt{Z_0 Y_0} = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)}$ (2.3.24)

则(2.3.23a)方程可写为

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \gamma^2 U = 0 \quad (2.3.25)$$

其解为

$$U(z) = U^i e^{-\gamma z} + U^r e^{\gamma z} \quad (2.3.26)$$

传输线方程的解

将式(2.3.26)代入式(2.3.20)，并定义

$$\text{特征阻抗 } Z_c = \frac{1}{Y_c} = \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}} = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} \quad (2.3.27)$$

由 $U(z) = U^i e^{-\gamma z} + U^r e^{\gamma z}$ ，带入 $\frac{\partial U}{\partial z} = -Z_0 I$ ，得

$$I = \frac{\gamma}{Z_0} (U^i e^{-\gamma z} - U^r e^{\gamma z})$$

带入 $\gamma = \sqrt{Z_0 Y_0}$ ，得：

$$I = \sqrt{\frac{Y_0}{Z_0}} (U^i e^{-\gamma z} - U^r e^{\gamma z}) = \frac{1}{Z_c} (U^i e^{-\gamma z} - U^r e^{\gamma z}) \quad (2.3.28)$$

传输线方程的解

记及时间变量，并记 $\gamma = \alpha + j\beta$ ，式(2.3.26)、(2.3.28)写为

$$U(z) = \operatorname{Re} \left[U^i e^{j(\omega t - \beta z)} e^{-\alpha z} + U^r e^{j(\omega t + \beta z)} e^{+\alpha z} \right] \quad (2.3.29)$$

$$I(z) = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{Z_c} \left(U^i e^{j(\omega t - \beta z)} e^{-\alpha z} - U^r e^{j(\omega t + \beta z)} e^{+\alpha z} \right) \right] \quad (2.3.30)$$

第一项，相位 $e^{j(\omega t - \beta z)}$ 表明沿+z方向传输的波，记为入射波；

第二项，相位 $e^{j(\omega t + \beta z)}$ 表明沿-z方向传输的波，记为反射波。

传输线方程的解

由2.1.1节可知 γ 正是波沿 z 方向的传输常数。如果传输线是均匀无耗的，则 $R_0 = G_0 = 0$ 。由式(2.3.24)可知，传播常数

$$\gamma = \sqrt{j\omega L_0 \cdot j\omega C_0} = j\omega\sqrt{L_0 C_0} \quad (2.3.31)$$

由式(2.3.29)可知，传播速度

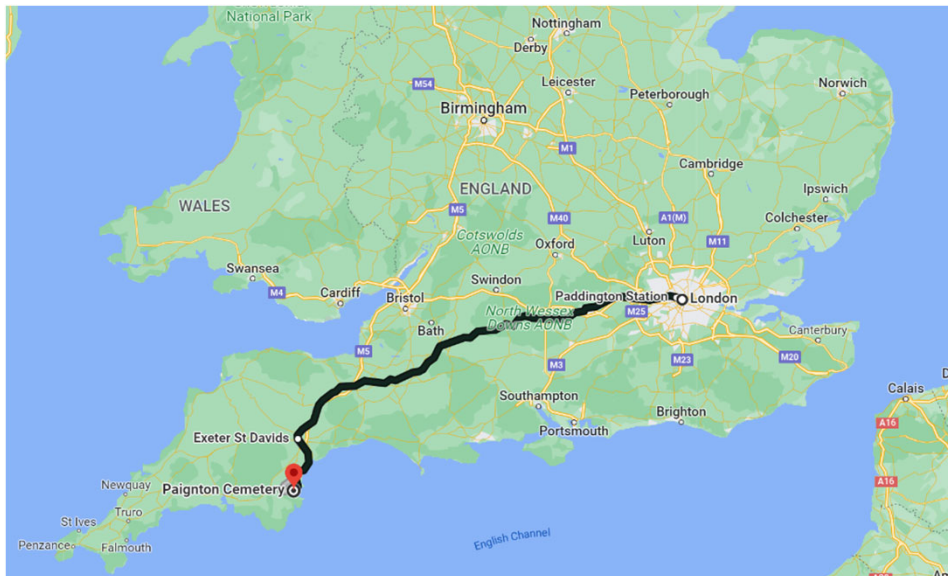
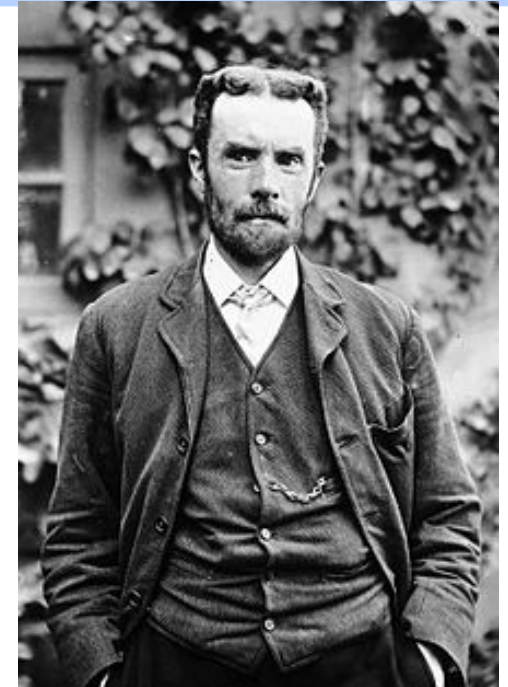
$$v_p = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} \quad (2.3.32)$$

波长 λ 为

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi v_p}{\omega} = \frac{v_p}{f} \quad (2.3.33)$$

Oliver Heaviside (1850–1925) was a self-educated English mathematical physicist who spent most of his life on the far fringes of the scientific community. Yet he did more than anyone else to shape how James Clerk Maxwell's electromagnetic theory was understood and applied in the 50 years after Maxwell's death. Indeed, Maxwell's equations in their most familiar vector form come from Heaviside.

- 独自创立了专门的矢量微积分学，简化了场论的符号表述
- 利用新发明的矢量微积分符号，将原来用繁杂的四元数描述的麦克斯韦方程组精简至4个
- Heaviside 单位阶跃函数
- “微分算子方法”
- 肯内利-黑维塞层(大气电离层)
- 黑维塞分式拆解法/黑维塞部分分式展开定理
- 术语“电感”的提出
- 电报员方程的提出者



$e + \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz} = 0$	(1) Gauss' Law
$\mu\alpha = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}$ $\mu\beta = \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx}$ $\mu\gamma = \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy}$	(2) Equivalent to Gauss' Law for magnetism
$P = \mu \left(\gamma \frac{dy}{dt} - \beta \frac{dz}{dt} \right) - \frac{dF}{dt} - \frac{d\Psi}{dx}$ $Q = \mu \left(\alpha \frac{dz}{dt} - \gamma \frac{dx}{dt} \right) - \frac{dG}{dt} - \frac{d\Psi}{dy}$ $R = \mu \left(\beta \frac{dx}{dt} - \alpha \frac{dy}{dt} \right) - \frac{dH}{dt} - \frac{d\Psi}{dz}$	(3) Faraday's Law (with the Lorentz Force and Poisson's Law)
$\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} = 4\pi p' \quad p' = p + \frac{df}{dt}$ $\frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} = 4\pi q' \quad q' = q + \frac{dg}{dt}$ $\frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} = 4\pi r' \quad r' = r + \frac{dh}{dt}$	(4) Ampère-Maxwell Law
$P = -\xi p \quad Q = -\xi q \quad R = -\xi r$	Ohm's Law
$P = kf \quad Q = kg \quad R = kh$	The electric elasticity equation ($\mathbf{E} = \mathbf{D}/\epsilon$)
$\frac{de}{dt} + \frac{dp}{dx} + \frac{dq}{dy} + \frac{dr}{dz} = 0$	Continuity of charge

